

# De la géométrie "classique" aux méthodes de simulation

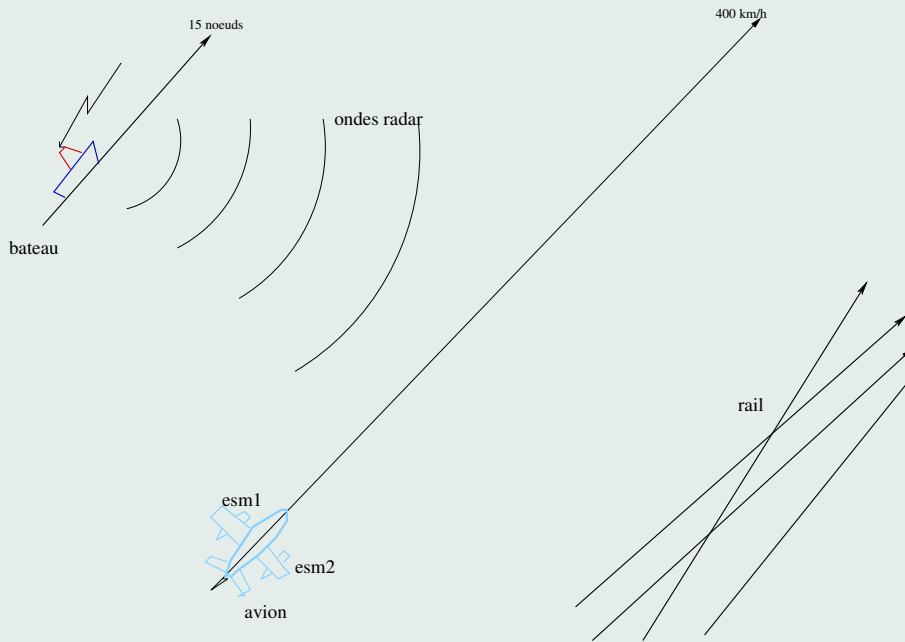
J.-Pierre Le Cadre (IRISA/CNRS)

IRISA, 15-16 oct. 2005

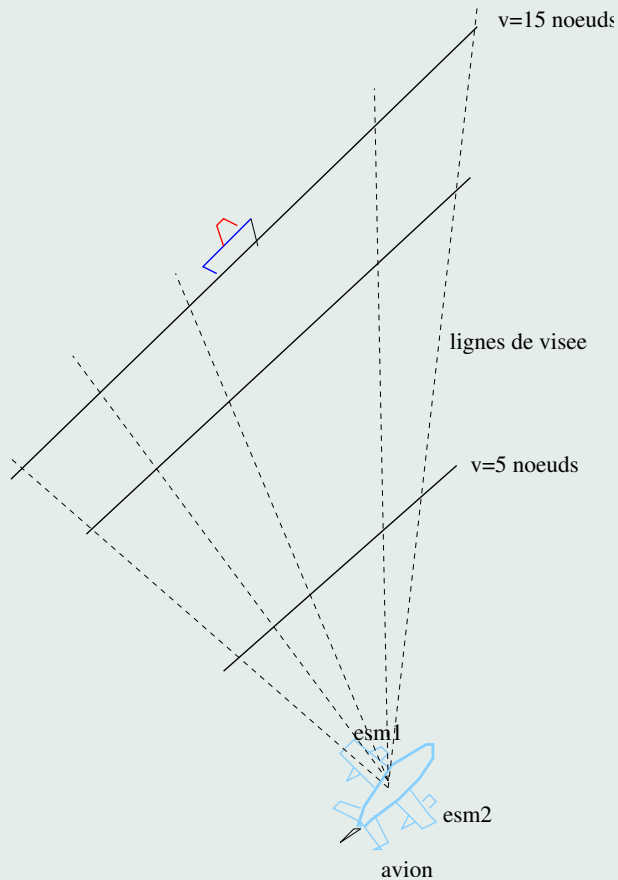
# De la géométrie "classique" aux méthodes de simulation

- Travaux développés dans le cadre THALES/Airborne Systems,
- Présentation du problème, les aspects géométriques,
- La réduction de l'incertitude via les contraintes,
- Estimer en simulant

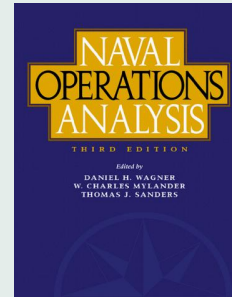
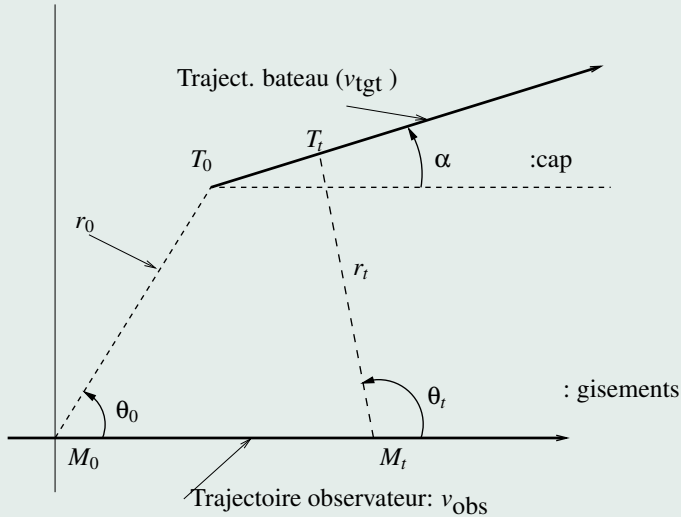




## Le scénario de surveillance maritime



Une vue "naive" : le théorème de Thales.



Une "formalisation" du scénario.

Pb : "estimer"  $r_0$  ? (et  $v$  et  $\alpha$  ?).

The "book" : Naval Operations Analysis (chapt. 7).

## Le cadre du problème

Un problème d'estimation très "spécial" : comment estimer un paramètre **inobservable** ?

L'avion (observateur) et le bateau sont **tous deux** animés d'un **mvt rectiligne et uniforme**,

**observations** : gisements (relèvements angulaires) estimés  $\{\hat{\theta}_i\}$  via une écoute passive (e.g. ESM).

**Pb** : estimation de  $r$  et  $v$  ? mais **inobservabilité**.

**Ingredients** :

a priori :  $v_{\min} \leq v \leq v_{\max}$

vitesse observateur (++) plus grande que celle du bateau.

**idée** :  $\longrightarrow$  remplacer la recherche du maximum par la détermination d'un domaine de confiance **a posteriori** (HPD).

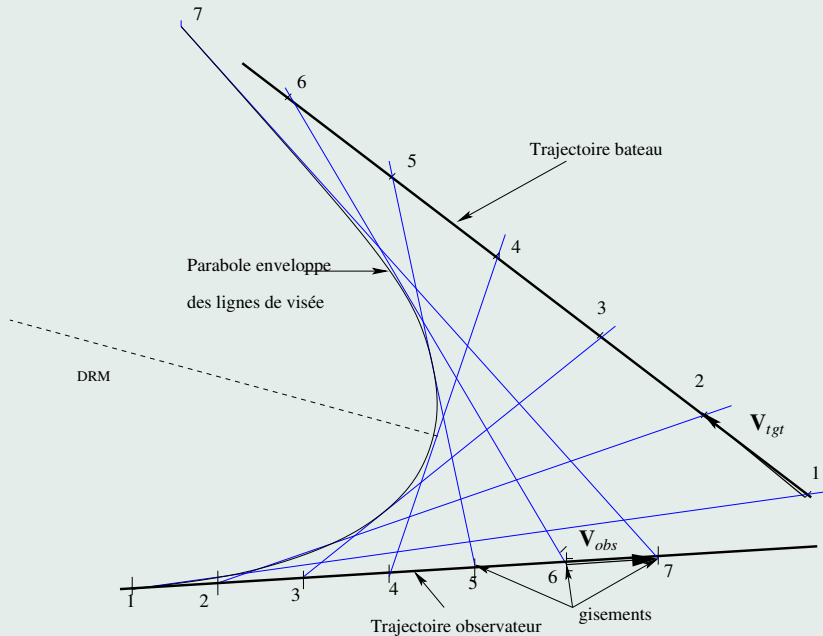
**Proposition 1** (Ketelle) *Supposons la traj. observateur =MRU et que (au moins) 3 gisements soient disponibles. Alors, il existe une parabole telle que toutes les lignes de relèvement soient des tangentes à cette parabole. Les tangentes à cette parabole sont aussi des trajectoires (bateau) candidates.*

**Proposition 2** *Sous les mêmes hypothèses, on a les relations d'incertitude suivantes :*

$$r_{\max}^2 - r_{\min}^2 = \frac{(v_{\max}^2 - v_{\min}^2)}{v^2} r^2, \quad (1)$$

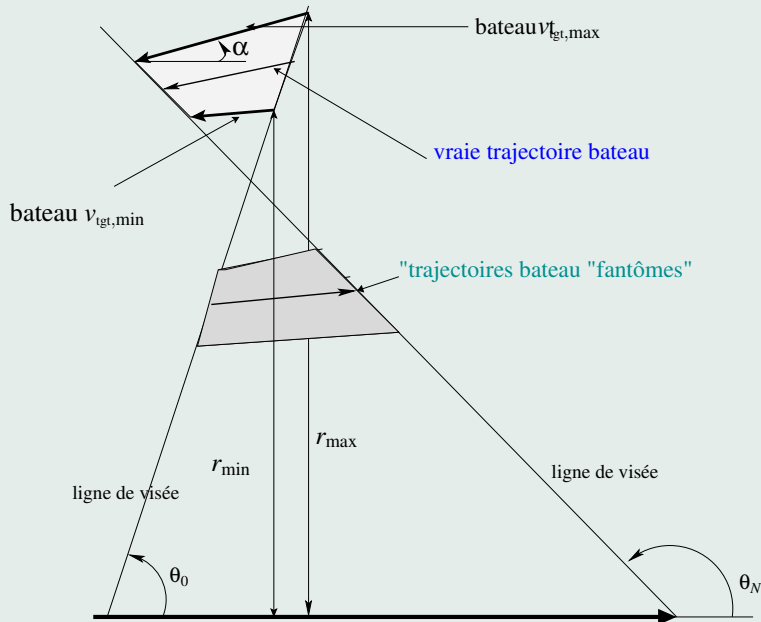
$$\approx 2 \frac{(v_{\text{tgt,max}} - v_{\text{tgt,min}}) \cos(\alpha)}{v_{\text{obs}}} r^2.$$

Le rapport  $2 \frac{(v_{\text{tgt,max}} - v_{\text{tgt,min}}) \cos(\alpha)}{v_{\text{obs}}}$  agit comme un **facteur de réduction** de l'incertitude pour l'estimation de la distance  $r$ , induit par les contraintes de vitesse du bateau (e.g.  $5 \text{ noeuds} \leq v \leq 15 \text{ noeuds}$ ).



La parabole, enveloppe des lignes de visées...et des trajectoires candidates





Trajectoire observateur ( $v_{obs}$ )

Définition du domaine d'incertitude.

La vraisemblance du vecteur de traj. bateau, pour les observations reçues, est donnée par :

$$L_{\hat{\theta}_{1:N}} [(r, \theta, v, \alpha)] \propto - \sum_{k=1}^N \left( \hat{\theta}_k - \theta_k[(r, \theta, v, \alpha)] \right)^2 ,$$

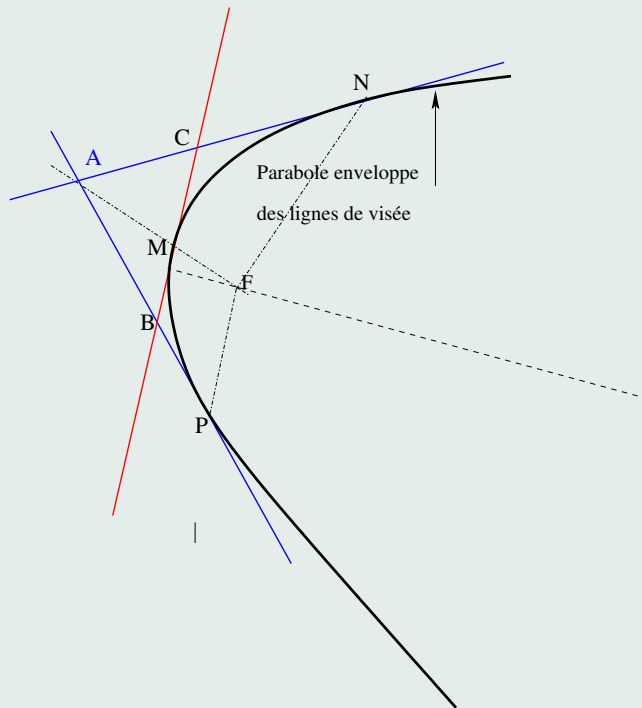
où  $\theta_k[(r, \theta, v, \alpha)]$  est le  $k$ -ième gisement associé au modèle  $(r, \theta, v, \alpha)$ .

L' enveloppe des lignes de visée  $\{L_t\}_t$  est définie par :

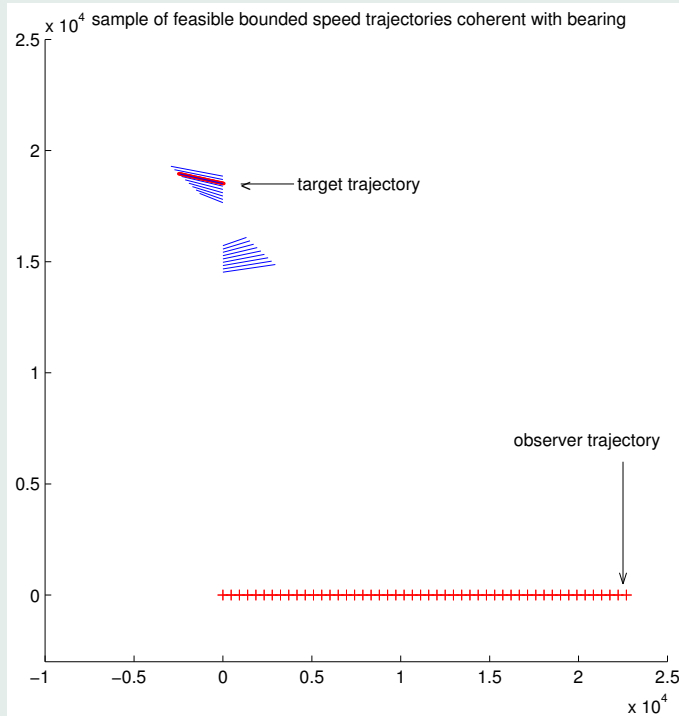
$$\begin{cases} g(\mathbf{X}, t) = 0 , \\ \frac{\partial}{\partial t} g(\mathbf{X}, t) = 0 . \end{cases}$$

Dont, on déduit l'équation de la parabole (forme quadratique), i.e. :

$$\mathbf{X}^T (Q\mathbf{V}\mathbf{V}^T Q^T) \mathbf{X} + \alpha_1 \mathbf{X}^T Q\mathbf{X}^0 + \beta_1 \mathbf{X}^T Q\mathbf{V} + \gamma_1 = 0 .$$

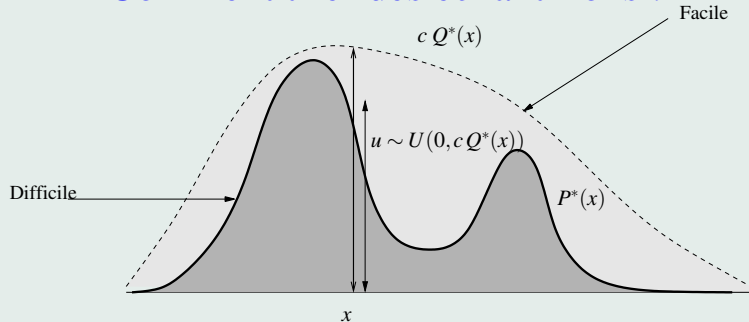


La seconde partie de la prop. 1 est **bien plus difficile** (Lebossé & Hémary : programme 1945). Soit  $\Delta(AP)$  et  $\Delta(AN)$  deux tangentes *fixes* à une parabole ; et  $\Delta(BC)$  une tangente générique (en  $M$ ). Soient aussi  $B$  et  $C$  les intersections de ces tangentes avec les droites  $\Delta(AP)$  et  $\Delta(AN)$ . Alors, on a :  $\frac{MB}{MC} = \frac{BP}{BA} = \frac{CA}{CN}$  .



**Le sablier** Le domaine des trajectoires possibles avec les contraintes vites se bateau  $v_{\min} = 10$  nœuds  $\leq v \leq v_{\max} = 25$  nœuds.

## Comment tirer des échantillons ?



On suppose que  $c Q^*(x) > P^*(x)$  qq soit  $x$ . On tire suivant la densité  $P^*(x)$  via l'algo. (accept-reject) :

- tirer  $x$  suivant  $Q(x)$  → éval.  $c Q^*(x)$ ,
- tirer une v.a.  $u$  uniforme dans  $[0, c Q^*(x)]$ ,
- (accept-reject) : si  $u > P^*(x)$  accept. ; sinon rejeter,
- répéter le tirage de  $x$ .

### The BOT MCMC Algorithm

{ définir  $(r, \theta, v, \alpha)^{(0)} = \left( \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}, \frac{\theta_{\min} + \theta_{\max}}{2}, \frac{v_{\min} + v_{\max}}{2}, 0 \right)$ , and set  $i = 0$ . .

{ Etant donné  $(r, \theta, v, \alpha)^{(i)}$

1. tirer  $(r', \theta', v', \alpha')$  selon ( $U$  : loi uniforme) :

$$q(r' | r^{(i)}) \sim U \left[ r^{(i)} - \left( \frac{r_{\max} - r_{\min}}{\kappa_1} \right), r^{(i)} + \left( \frac{r_{\max} - r_{\min}}{\kappa_1} \right) \right]$$

$$q(\theta' | \theta^{(i)}) \sim U \left[ \theta^{(i)} - \frac{10\sigma}{\kappa_2}, \theta^{(i)} + \frac{10\sigma}{\kappa_2} \right]$$

$$q(v' | v^{(i)}) \sim U \left[ v^{(i)} - \left( \frac{v_{\max} - v_{\min}}{\kappa_3} \right), v^{(i)} + \left( \frac{v_{\max} - v_{\min}}{\kappa_3} \right) \right]$$

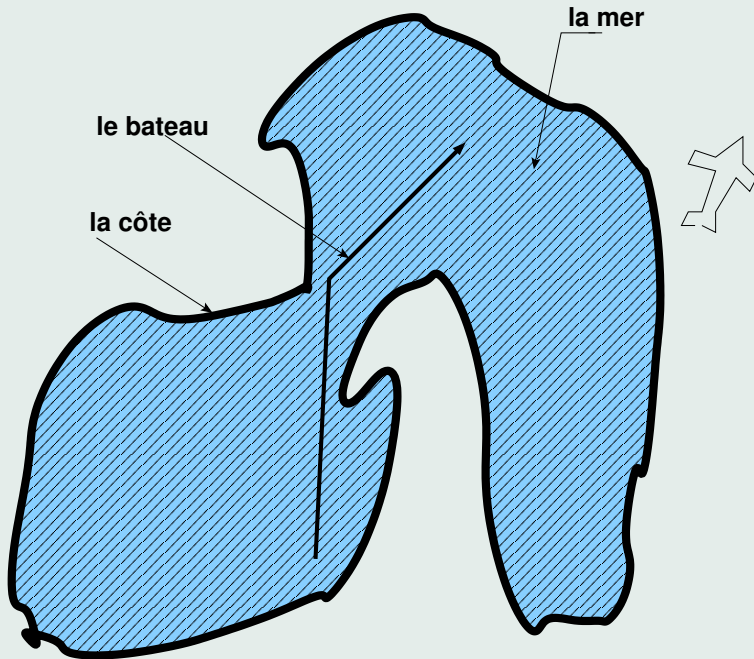
$$q(\alpha' | \alpha^{(i)}) \sim U \left[ \alpha^{(i)} - \frac{2\pi}{\kappa_4}, \alpha^{(i)} + \frac{2\pi}{\kappa_4} \right]$$

2. choisir

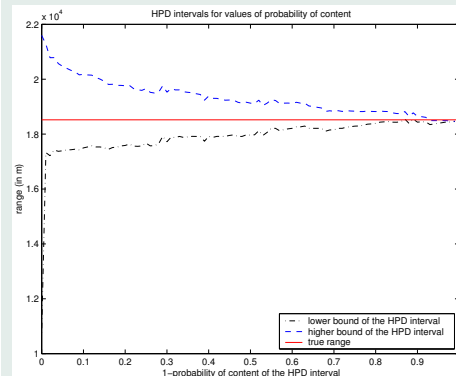
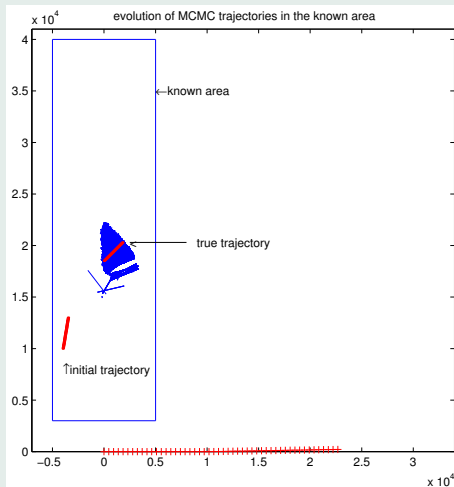
$$(r, \theta, v, \alpha)^{(i+1)} = \begin{cases} (r', \theta', v', \alpha') & \text{avec la probabilité } \rho \\ (r, \theta, v, \alpha)^{(i)} & \text{avec la probabilité } 1 - \rho \end{cases}$$

où  $\rho = \min(R, 1)$

et où  $R$  est le quotient des densités a posteriori.



Prise en compte de contraintes complexes de trajectoire.



A gauche : itérations des tirages de traj. candidates. Intervalle de confiance, pour l'estimation de  $r$ , de taille minimale.



# Conclusions

- **influence des contraintes**,
- les contraintes sont satisfaites (par construction),
- une méthode simple et statistique, estimation → **5 minutes**,
- → trajectoires et contraintes complexes.

# Extensions

- deghosting (supprimer les fantômes, via un test statistique),
- association piste-à-piste,
- réjection des mesures "aberrantes".

La trajectoire cible peut être modélisée par un vecteur 3-D  $\mathbf{Y} = (r_x(0), v_x(0), r_y(0))^T$ , de telle sorte que l'éq. d'observation s'écrive :

$$\mathcal{B}_\theta \mathbf{Y} = v_y(0) \mathbf{t} \quad \text{où :}$$

$$\mathcal{B}_\theta = \begin{pmatrix} \tan \theta_1 & \tan \theta_1 & -1 \\ \tan \theta_2 & 2 \tan \theta_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tan \theta_N & N \tan \theta_N & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} .$$

On a alors :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} v_y(0) \mathcal{B}_\theta^\# \mathbf{t} \\ v_y(0) \end{pmatrix} , \text{ où : } \mathcal{B}_\theta^\# = (\mathcal{B}_\theta^T \mathcal{B}_\theta)^{-1} \mathcal{B}_\theta .$$

La contrainte vitesse s'écrit alors :

$$v_{\min}^2 \leq v_y^2 \left( 1 + (\mathcal{B}_\theta^{-1} \mathbf{t})_2^2 \right) \leq v_{\max}^2 ,$$

et on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{r}_{\max}\|^2 - \|\vec{r}_{\min}\|^2 &= (v_{\max}^2 - v_{\min}^2) \frac{(\mathcal{B}_\theta^{-1} \mathbf{t})_1^2 + (\mathcal{B}_\theta^{-1} \mathbf{t})_3^2}{1 + (\mathcal{B}_\theta^{-1} \mathbf{t})_2^2} , \\ &= (v_{\max}^2 - v_{\min}^2) \left( \frac{r^2}{v^2} \right) , \\ &\approx 2 \frac{(v_{\text{tgt,max}} - v_{\text{tgt,min}}) \cos(\alpha)}{v_{\text{obs}}} . \end{aligned}$$

Ce rapport est un facteur de réduction d'incertitude du aux contraintes vitesse, pour l'estimation de la distance  $r$ , et il est "énorme".