Diabolo grenadine et pollution agricole : un point commun

Lionel LENOTRE, Equipe-projet Sage et Tosca, INRIA Rennes et Nancy

Lycée René Descartes, 9 mars 2014, Rennes, France.

Section 1

Introduction

Subsection 1

A childish experiment and its adult counterpart

La fabrication d'un diabolo grenadine

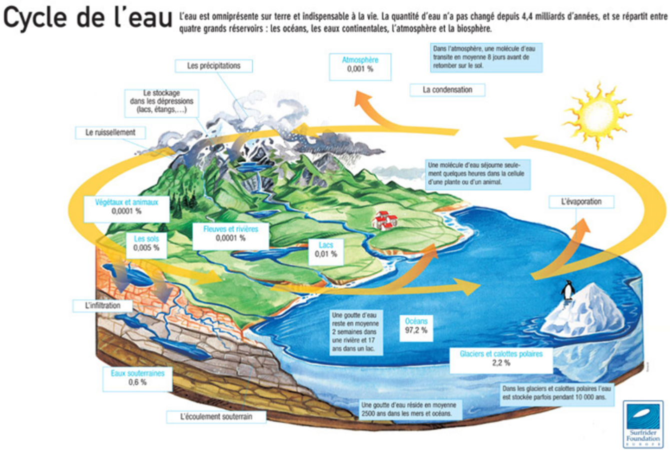
Ingrédients

- Sirop de grenadine
- Limonade

Un point intéressant : le mélange

Diffusion

Un petit rappel



Pollution et cycle de l'eau

Recette

- Pollution humaine
- Cycle de l'eau

Melange

$$\begin{tikzcd}
RFB \arrow[r, "(1)"] \arrow[dr] & Pluie \arrow[d] & NaN03 \arrow[l, "(1)"'] \arrow[dl] \\
& \text{Sol avec eau de surface} \arrow[d, "(2)"] & \\
& \text{Eau souterraine} &
\end{tikzcd}$$

1. Diffusion durant l'état gazeux
2. Diffusion et transport à l'état liquide

Résultat :

Subsection 2

The diffusion: the underlying phenomena

Qu'est-ce que la diffusion ?

Un phénomène décrit par

- La loi de Fick: tendance naturelle des espèces chimiques à se repartir de manière homogène
- Basée sur la conservation du flux

Découverte par A. Fick en 1855 et prouvée par A. Einstein en 1905.

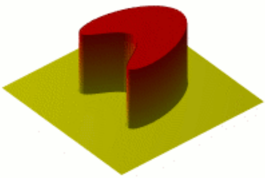
Représentation mathématique

Une équation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} c(t,x) = d\Delta c(t,x)) + v \cdot \nabla c(t,x), \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Omega \\ c(0,x) = c(x) \quad \text{et} \quad c(t,x) = 0 \quad [t,x] \in [0,T] \times \partial\Omega \end{cases}$$

En quelques mots:

- L'endroit où se tient l'expérience
- Un état initial $c(0,x) = c(x)$
- Une description de l'évolution en temps



Où rencontre-t-on cette équation ?

En biologie :

- Mouvement des protéines
- Activité électrique du cerveau
- Déplacement des globules rouges

En finance:

- Anticiper l'évolution d'un actif
- Quantifier les risques

Section 2

La recette numérique du diabolo grenadine

Subsection 1

Doctor Euler et Mister Lagrange

Le point de vue de Euler

L'idée

A une position fixe mesurer la concentration

Ainsi

En prenant les valeurs aux différentes positions, on peut donner une approximation de la concentration

Le point de vue de Lagrange

L'idée

Monter sur une particule de polluant et voir oú elle finit

Ainsi

En faisant cela avec plusieurs particules, on peut savoir oú se trouve la majorité d'entre elles. On pourra ainsi obtenir une approximation de la concentration.

Subsection 2

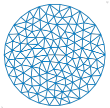
Application des méthodes en simulation numérique

Que se passe-t-il avec la méthode d'Euler ?

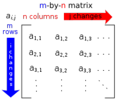
L'idée

- On place un maillage sur le domaine
- On résout en chaque point du maillage
- On fait une interpolation

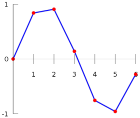
Maillage



Résolution matricielle



Interpolation

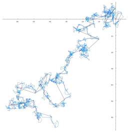


Que se passe-t-il avec la méthode de Lagrange ?

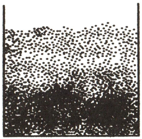
L'idée

- Simuler le comportement d'un grand nombre de particules
- Calculer des moyennes en espace
- Interpoler pour obtenir la solution

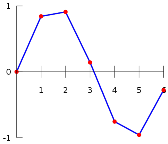
Simulation



Calcul des moyennes



Interpolation



Subsection 3

Différence entre les deux méthodes : l'échelle

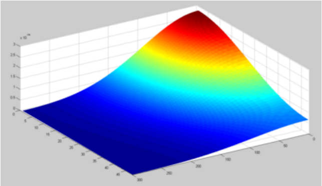
Euler : un regard macroscopique

Echelle macroscopique:

ce que l'on peut voir avec ses yeux

Réalité

Simulation



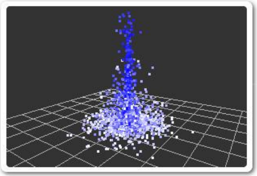
Lagrange : un regard microscopique

Echelle microscopique:

ce que l'on peut voir avec au minimum un microscope

Réalité

Simulation



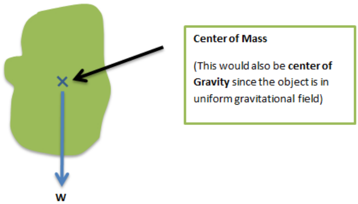
Subsection 4

How to measure pollution with these methods ?

Quantité d'intérêt pour la pollution

Deux quantités essentielles:

- Centre de masse
- Dispersion ou étalement



Comment les calculer:

méthode Eulerienne

Par une intégration numérique de la fonction approximée.

méthode Lagrangienne

Faire des moyennes sur la position des particules.

Section 3

La recette numérique du diabolo grenadine par Lagrange

Subsection 1

Une equation et une solution

Une équation simplifiée de la diffusion

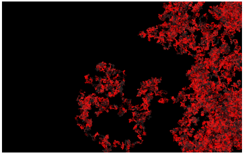
L'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} c(t,x) = \frac{1}{2}\Delta c(t,x), \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \Omega \\ c(0,x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

Ce qu'elle décrit:

le mouvement de particules selon une dynamique Brownienne

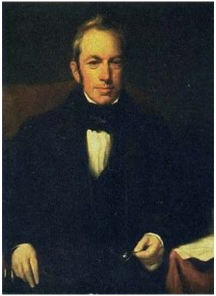
Illustrations:

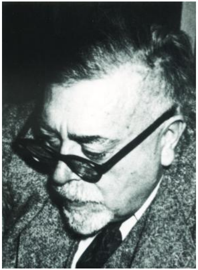


Robert Brown et les particules

Un peu d'histoire:

- Mentionner par Lucrece en 60 avant J.C
- Décrit par Robert Brown en 1827 depuis l'observation de pollen
- Utilis'e par Louis Bachelier en Finance dans son doctorat
- Défini par Norbert Wiener en 1923
- Etudié d'un point de vue probabiliste par Paul Lévy en 1933

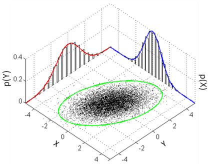




Quelle est la solution de cette équation ?

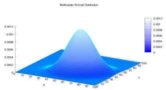
Qu'est-ce que $c(t, x)$:

La densité d'une loi de probabilité évoluant à travers le temps



The solution:

$$c(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$



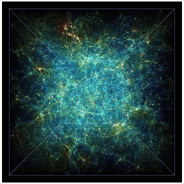
Subsection 2

Un algorithm de simulation

Solution et méthode de simulation

Avec $c(t, x)$:

On peut simuler les positions des particules aux temps t, $2t$ et ainsi de suite...



Algorithme

une simple boucle : simuler à chaque intervalle de temps un nuage de point

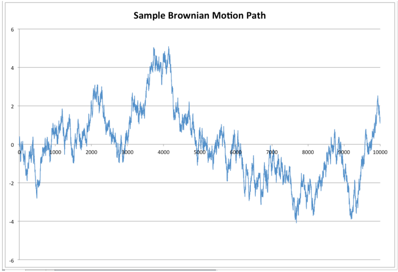
Description mathématique du mouvement Brownien

Le mouvement Brownien en dimension 1:

- Processus stochastique continue
- Accroissements Gaussiens indépendants et stationnaires

Propriétés remarquables:

- Processus Markovien
- Invariant par changement de temps: fractale



Une méthode de simulation

Etapes par étapes:

- Découper en petits morceaux égaux un intervalle de temps $[0, T]$
- Simuler des gaussiennes de paramètre : la taille des morceaux
- Sommer les gaussiennes pour obtenir la valeur à chaque instant de la découpe

Subsection 3

Comment simuler une variable aléatoire

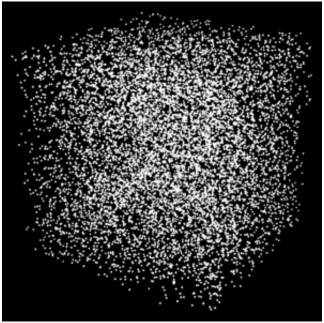
La simulation du hasard

<u>Générateur de nombres aléatoires:</u>

Un petit code et des algorithms pour imiter l'aléa

<u>Précisément:</u>

Un GNR génère des points aléatoire uniformément sur $[0, 1]$



Simuler une Gaussienne

La méthode de la Ziggourat:

- On choisit une tranche uniformément
- On tire un nombre aléatoire entre 0 et la longueur de la tranche
- Si le tirage est dans une zone sûre, on le garde et on arrête
- Sinon on tire un autre nombre entre 0 et la hauteur de la tranche
- Si le nombre est sous le graphe de la Gaussienne, On le garde et on arrête
- Sinon on reprend depuis le début